

Exercice 1.

Soit n un nombre entier naturel non nul, on pose : $a_n = \underbrace{333\dots 33}_n$ 1
n fois le chiffre 3

- 1) Vérifier que a_1 et a_2 sont premiers.
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.
- 3) Démontrer que pour tout entier naturel k : $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$.
- 4) Démontrer que pour tout entier naturel k : $3a_{30k+1} \equiv 0 \pmod{31}$, en déduire que 31 divise a_{30k+1} .
- 5) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, si $n \equiv 1 \pmod{30}$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2.

On rappelle que $(\mathbb{C}; +; \times)$, est un corps commutatif et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dont l'unité est la matrice identique

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(a; b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E = \{M(a; b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- 1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +)$
- 2) On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $J^2 = J \times J$ en déduire que E n'est pas une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.
- 3) On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $" * "$ par :
 $(\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})) ; (\forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})) ; A * B = A \times N \times B$ avec $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit φ l'application de $\mathcal{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $\{(a; b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}\} ; \varphi(a + ib) = M(a; b)$
 - a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathcal{C}^*; \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); *)$
 - b) On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathcal{C}^*) = E^*$.
 - c) En déduire que $(E^*; \times)$ est un groupe commutatif.
- 4) Montrer que : $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$.
- 5) Montrer que $(E; +; *)$ est un corps commutatif.

Exercice 3.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

- 1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z suivante : $(E): z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$
 - a) Vérifier que : $\Delta = (i\sqrt{2}e^{i\theta})^2$ est le discriminant de l'équation (E).
 - b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
- 2) On considère les points I, J, T_1 , T_2 et A d'affixes respectifs 1 ; -1 ; $e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$; $e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.
 - a) Montrer que les droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.
 - b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$, montrer que les points O, K et A sont alignés.
 - c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.
- 3) Soit R la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a) Donner l'expression complexe de la rotation R.
 - b) Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation R est : $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$
 - c) Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont perpendiculaires.
- 4) Déterminer l'affixe du point C l'image du point A par la translation de vecteur $-\vec{v}$.
- 5) Montrer que le point A est le milieu du segment [BC].

Exercice 4.

Partie I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} & (x > 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$. 0 ; 5 pts
b) Etudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. 0 ; 25pts
- 2) a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$. 0 ; 25pts
b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$. 0 ; 25pts
c) Montrer que : $(\exists \alpha \in]0; 1[) / f'(\alpha) = 0$. 0 ; 5 pts
d) En déduire que : $(\exists \alpha \in]0; 1[) / f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$. 0 ; 5 pts

Partie II

On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

(C) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Vérifier que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$.

0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$.

1 pts

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

1 pts

2) a) Montrer que F est dérivable sur $[0; +\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

0,5 pts

b) Etudier les variations de F sur .

0,25pts

Partie III

1) a) Vérifier que : $(\forall t \in]0; +\infty[) ; -t \ln(t) \leq \frac{1}{e}$.

0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall t \in]0; +\infty[) ; f(t) \leq \frac{1}{e}$.

0,25 pts

c) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) \leq x$.

0,25pts

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0; 1[\\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in]0; 1[$.

0 ; 25 pts

b) Montrer la suite (u_n) est strictement décroissante en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pts

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

0 ; 5 pts

Exercice 5.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{Si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue sur .

0,5 pts

2) Pour tout x de $[0; +\infty[$, on pose : $L(x) = \int_x^1 g(t) dt$.

a) Montrer que la fonction L est continue sur .

0,25 pts

b) Calculer $L(x)$ pour tout $x > 0$.

0 ;25 pts

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ en déduire $L(0)$.

0,5 pts

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

0,5 pts